**Zadanie 1.** Dla jakiej wartości parametru $a$, równanie $3^{\sqrt{x}-2}+3^{4-\sqrt{x}}=a$, ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste?

Rozpatrzmy równanie

$$3^{\sqrt{x}-2}+3^{4-\sqrt{x}}=a. \tag{1}$$

Dziedzina $x \geqslant 0$.

### I sposób (algebraiczny)

$$3^{\sqrt{x}}/3^2+3^4/3^{\sqrt{x}}=a.$$

Podstawmy $3^{\sqrt{x}}=t$, $t \geqslant 1$, ponieważ $3^{\sqrt{x}} \geqslant 1$ dla każdego $x \geqslant 0$.

Przekształcając równanie

$$\frac{t}{9}+\frac{81}{t}=a,$$

otrzymujemy

$$t^2-9at+729=0. \tag{2}$$

Jeżeli wyróżnik powyższego trójmianu jest ujemny ($\Delta<0$), to równanie (2) nie ma rozwiązań rzeczywistych i to samo można powiedzieć o równaniu (1). Przypadek $\Delta=0$ ma miejsce gdy:

$$81a^2-2916=0,$$

to znaczy gdy $a=6 \vee a=-6$. Oczywiście dla $a=-6$ równanie (1) nie ma rozwiązań. Dla $a=6$ otrzymujemy $t=27$ i równanie (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie $x=9$.

Rozpatrzmy przypadek $\Delta>0$, czyli $|a|>6$. wówczas równanie (2) ma dwa różne rozwiązania

$$t_1=\frac{9a-\sqrt{81a^2-2916}}{2},\ t_2=\frac{9a+\sqrt{81a^2-2916}}{2}.$$

Oczywiste jest, że $t_1<t_2$. Wyjściowe równanie (1) będzie miało dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $t_1<1 \leqslant t_2$. Przypadek $t_2=1$ można wykluczyć, ponieważ wtedy $t_1=729>1$, co łatwo zauważyć na przykład ze wzorów Viete'a. Rozpiszmy zatem warunek $t_1<1<t_2$, dokonując przekształceń równoważnych:

$$\begin{aligned}\frac{9a-\sqrt{81a^2-2916}}{2} &< 1 < \frac{9a+\sqrt{81a^2-2916}}{2},\\ 9a-\sqrt{81a^2-2916} &< 2 < 9a+\sqrt{81a^2-2916},\\ 9a-9\sqrt{a^2-36} &< 2 < 9a+9\sqrt{a^2-36},\\ -9\sqrt{a^2-36} &< 2-9a < 9\sqrt{a^2-36}.\end{aligned}$$

Korzystając z własności wartości bezwzględnej, mamy

$$|2 - 9a| < 9\sqrt{a^2 - 36}.$$

Podnosząc obie strony do kwadraty, otrzymujemy

$$\begin{aligned}(2-9a)^2 <& 81(a^2-36),\\ 4 - 36a + 81a^2 <& 81a^2 - 2916,\\ 2920 <& 36a.\end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie przez 36, dostajemy

$$81\frac{1}{9} < a.$$

Ostatecznie wnioskujemy, że równanie (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste dla parametru $a \in \{6\} \cup \left(81\frac{1}{9}, +\infty\right)$.

Sprawdźmy, co się dzieje dla $a = 81\frac{1}{9}$. Wtedy

$$t^2 - 9\frac{730}{9} + 729 = 0,$$

równanie to posiada dwa rozwiązania

$$\begin{aligned}t_1 &= \frac{730 - 728}{2} = 1,\\ t_2 &= \frac{730 + 728}{2} = 729.\end{aligned}$$

Wówczas $x_1 = 0$, $x_2 = 36$ są rozwiązaniami równania (1).